20/11/2018

Λήμμα: Έστω X σύνολο
και $\varphi: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ μια αύξουσα ως προς την διάταξη $\subseteq$ συνάρτηση
(δηλ. αν $A \subseteq B$ τότε $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$)
Να δειχθεί ότι η φ έχει ένα σταθερό σημείο
δηλ. υπάρχει $D \in \mathcal{P}(X)$ ώστε $\varphi(D) = D$.

Απόδειξη: Θέτουμε $C = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq \varphi(A)\}$. Προφανώς $\emptyset \in C$
(άρα $C \neq \emptyset$)
Θέτουμε $D = \bigcup C$
Θα αποδείξουμε ότι $\varphi(D) = D$
$\forall A \in C$ έχουμε $A \subseteq D$ και εφόσον η φ είναι αύξουσα $\varphi(A) \subseteq \varphi(D)$
εφόσον $A \in C$ έχουμε επίσης $A \subseteq \varphi(A)$. Συνεπώς $A \subseteq \varphi(D)$.
Έτσι δείξαμε ότι για κάθε $A \in C$ ισχύει $A \subseteq \varphi(D)$
Συνεπώς $\bigcup C \subseteq \varphi(D)$ δηλαδή $D \subseteq \varphi(D)$. (1)
Από την (1), εφόσον η φ είναι αύξουσα προκύπτει ότι $\varphi(D) \subseteq \varphi(\varphi(D))$
και άρα $\varphi(D) \in C$. και άρα $\varphi(D) \subseteq \bigcup C$ δηλ. $\varphi(D) \subseteq D$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει $\varphi(D) = D$.

Θεώρημα (του Knaster)
Έστω $(A, \leq)$ μια πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο με μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.
και $\varphi: A \to A$ μια αύξουσα ως προς $\leq$ συνάρτηση (δηλ. αν $a, b \in A$ με $a \leq b$ τότε $\varphi(a) \leq \varphi(b)$)
Τότε η φ έχει σταθερό σημείο. Δηλαδή υπάρχει $a \in A$ ώστε $\varphi(a) = a$.

Απόδειξη: Θέτουμε $X = \{x \in A \ , \ x \leq \varphi(x)\}$
Το σύνολο X είναι μη κενό εφόσον $\min A \in X$ και άνω φραγμένο (το $\max A$ είναι άνω φράγμα του X).
Εφόσον το $(A, \leq)$ είναι πλήρως διατεταγμένο υπάρχει το supremum του X.
Θέτουμε $a = \sup X$
→ $\forall y \in X$ ισχύει $y \leq a$ και άρα αφού η φ είναι αύξουσα $\boxed{\varphi(y) \leq \varphi(a)}$
Επίσης εφόσον $y \in X$ θα ισχύει $y \leq \varphi(y)$. άρα $y \leq \varphi(a)$.
Έτσι δείξαμε ότι για κάθε $y \in X$ ισχύει $y \leq \varphi(a)$
Άρα το $\varphi(a)$ είναι άνω φράγμα του X. Εφόσον $a = \sup X$ προκύπτει $\boxed{a \leq \varphi(a)}$ (1)
Εφόσον η φ είναι αύξουσα προκύπτει $\varphi(a) \leq \varphi(\varphi(a))$ άρα $\varphi(a) \in X$ και εφόσον $a = \sup X$ προκύπτει $\boxed{\varphi(a) \leq a}$ (2)
Από (1), (2) $\varphi(a) = a$.

Φυλλάδιο 4.

Άσκηση 1:

→ Η σ δεν είναι αυτοπαθής εφόσον $1 \not\sigma 1$ (διότι $3 \cdot 1 \neq 2 \cdot 1$)
→ Η σ δεν είναι συμμετρική αφού $4 \sigma 6$ (διότι $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$)
ενώ $6 \not\sigma 4$ (διότι $3 \cdot 6 \neq 2 \cdot 4$)

→ Η σ είναι αντισυμμετρική
Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$\left.\begin{array}{l} x \sigma y \\ y \sigma x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x = 2y \\ 3y = 2x \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}y \\ 3y = 2 \cdot \frac{2}{3}y \end{array}\right. \Leftrightarrow \dots \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$x = y$$

Η σ δεν είναι μεταβατική
$4 \sigma 6$ (αφού $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$)
$6 \sigma 9$ (διότι $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$)
$4 \not\sigma 9$ (διότι $3 \cdot 4 \neq 2 \cdot 9$)

(2) Στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε τη σ ως εξής

$x\sigma y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad x^2 = ky$

$$\left[\begin{array}{l} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad \frac{x^2}{y} = k \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} \in \mathbb{N} \end{array}\right]$$

σ αυτοπαθής

Για κάθε $x \in \mathbb{N}$

$\frac{x^2}{x} = x \in \mathbb{N}$ άρα $x\sigma x$

Η σ δεν είναι συμμετρική

$2\sigma 1$ (διότι $\frac{2^2}{1} = 4 \in \mathbb{N}$)

$1 \not\sigma 2$ (διότι $\frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)

Η σ δεν είναι αντισυμμετρική

$4\sigma 2$ (αφού $\frac{4^2}{2} = 8 \in \mathbb{N}$)

$2\sigma 4$ (αφού $\frac{2^2}{4} = 1 \in \mathbb{N}$)

$2 \neq 4$

Η σ δεν είναι μεταβατική

$2\sigma 4$ ($\frac{2^2}{4} = 1 \in \mathbb{N}$)

$4\sigma 8$ ($\frac{4^2}{8} = 2 \in \mathbb{N}$)

$2 \not\sigma 8$ (διότι $\frac{2^2}{8} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)

Άσκηση

Αν μια σχέση σ σ' ένα σύνολο Ε είναι αυτοπαθής, συμμετρική και αντισυμμετρική. ΝΔΟ $\sigma = \Delta_E$ (με αυτά λέμε που $\Leftrightarrow x=y$)

σ αυτοπαθής $\Rightarrow \Delta_E \subseteq \sigma$

σ συμμετρική $\Rightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

σ αντισυμμετρική $\Rightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$

(β),(γ) $\Rightarrow \sigma \subseteq \Delta_E$ (δ)

(α),(δ) $\sigma = \Delta_E$

Άσκηση 3

σ σχέση στο Ε

Ν.Δ.Ο. σ μερική διάταξη $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_E = \sigma \cup \sigma^{-1} \\ \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma \end{cases}$

Λύση

$\Rightarrow$ Υποθέτουμε ότι η σ είναι μερική διάταξη

δηλ.:

- αυτοπαθής $\Rightarrow \Delta_E \subseteq \sigma$ (α)
- αντισυμμετρική $\Rightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$ (β)
- μεταβατική $\Rightarrow \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$ (γ)

Δείχνουμε ότι $\Delta_E \subseteq \sigma \cap \sigma$

Αν $(x,y) \in \Delta_E$, τότε $x=y$. Άρα αφού $\Delta_E \subseteq \sigma$

$(y,x) \subseteq \sigma$, άρα $(x,y) \in \sigma^{-1}$. Άρα $\Delta_E \subseteq \sigma^{-1}$

Άρα $\Delta_E \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1} \overset{(\beta)}{\Rightarrow} \Delta_E = \sigma \cap \sigma^{-1}$

⇐) Υποθέτουμε ότι $\Delta_E = \sigma \cap \sigma^{-1}$ (δ)

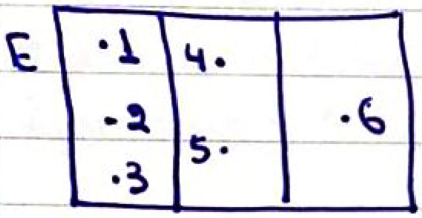
$\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma \Rightarrow \sigma$ μεταβατική

(δ) $\Rightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$

άρα σ αντισυμμετρική

$\Delta_E = \sigma \cap \sigma^{-1}$, άρα σ αυτοπαθής

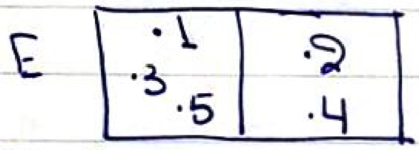
Άσκηση 4.



$\sim = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,6)\}$

Η ~ είναι σχέση ισοδυναμίας η οποία έχει ακριβώς τρεις κλάσεις ισοδυναμίας τις $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6\}$

Άσκηση 5

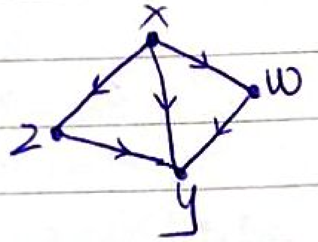


Ορίζουμε:

$\sim = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.

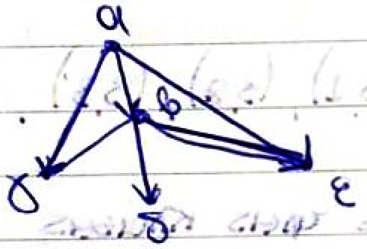
Άσκηση 6

$\leq = \{(x,x), (z,z), (\omega,\omega), (y,y), (x,z), (x,\omega), (z,y), (\omega,y), (x,y)\}$



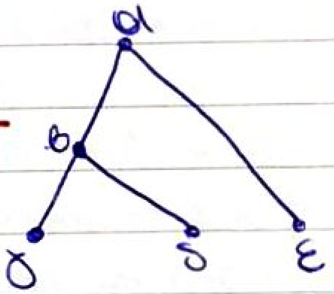
Είναι σχέση μερικής διάταξης με ελάχιστο το x και μέγιστο το y.

Άσκηση 7

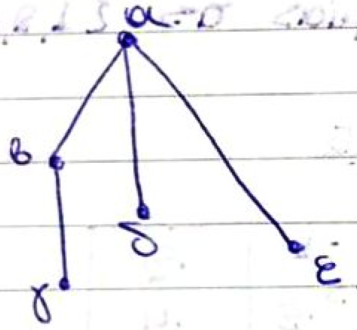


$\leq (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)(\gamma,\gamma)(\delta,\delta)(\varepsilon,\varepsilon)(\alpha,\beta)(\alpha,\gamma)(\alpha,\delta)(\alpha,\varepsilon)(\beta,\gamma)(\beta,\delta)(\beta,\varepsilon)\}$

2η Λύση:



3η Λύση:



Άσκηση 8

α) Έχουμε: $(\sigma \cup \sigma^{-1})^{-1} = \sigma^{-1} \cup (\sigma^{-1})^{-1}$

$= \sigma^{-1} \cup \sigma$

$= \sigma \cup \sigma^{-1}$

Άρα η $\sigma \cup \sigma^{-1}$ είναι συμμετρική.

β) Έστω C μια συμμετρική σχέση στο E με $\boxed{\sigma \subseteq C}$.

C συμμετρική $\Rightarrow C = C^{-1}$.

$\sigma \subseteq C \Rightarrow \sigma^{-1} \subseteq C^{-1} \Rightarrow \sigma^{-1} \subseteq C$

Άρα $\sigma \cup \sigma^{-1} \subseteq C$.

Άσκηση 9

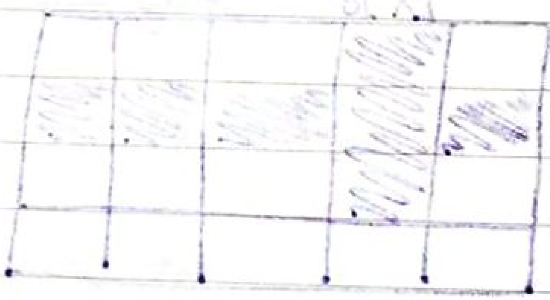
α) $\sigma \cap r$ αυτοπαθής

Έστω $x \in E$

Εφόσον σ αυτοπαθής $(x,x) \in \sigma$

Εφόσον r αυτοπαθής $(x,x) \in r$

Άρα $(x,x) \in \sigma \cap r$



$\sigma \cap r$ συμμετρική

Έστω $x,y \in E$ με $(x,y) \in \sigma \cap r$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x,y) \in \sigma \\ (x,y) \in r\end{array}\right\} \xrightarrow[r \text{ συμ.}]{\sigma \text{ συμ.}} \begin{array}{l}(y,x) \in \sigma \\ (y,x) \in r\end{array}$$

$\Rightarrow (y,x) \in \sigma \cap r$.

$\sigma \cap r$ μεταβατική

Έστω $x,y,z \in E$

με $\begin{cases} (x,y) \in \sigma \cap r \\ (y,x) \in \sigma \cap r \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x,y)\in\sigma \\ (x,y)\in r \\ (y,x)\in\sigma \\ (y,x)\in\sigma \end{cases}$ σ μεταβ. $\Rightarrow (x,y)\in\sigma$ r μεταβ. $\Rightarrow (x,y)\in r$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z)\in\sigma\cap r$

$\Rightarrow$ Επομένως η $\sigma\cap r$ είναι σχέση ισοδυναμίας

β) Έστω $x\in E$ (θα βρούμε την $[x]_{\sigma\cap r}$)

$a\in[x]_{\sigma\cap r} \Leftrightarrow (a,x)\in\sigma\cap r$

$\Leftrightarrow (a,x)\in\sigma$ και $(a,x)\in r$

$\Leftrightarrow a\in[x]_\sigma$ και $a\in[x]_r$

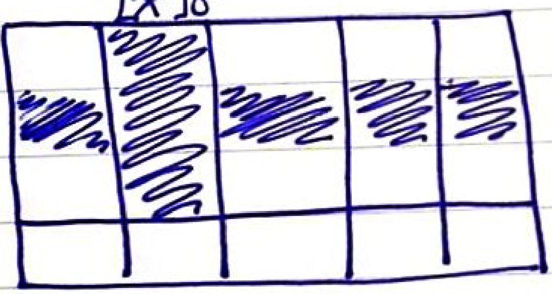
$\Leftrightarrow a\in[x]_\sigma\cap[x]_r$

Επομένως

$[x]_{\sigma\cap r} = [x]_\sigma \cap [x]_r$

E $\quad [x]_\sigma$

$[x]_r$



(6) Έστω σ μια διμελής σχέση σ' ένα σύνολο E. Να δειχθεί ότι η σ είναι μια σχέση ισοδυναμίας αν-ν είναι συμμετρική, μεταβατική και ισχύει ότι

(*) $\forall x\in E\ \exists y\in E\ x\sigma y$.

Απάντηση

Υποθ. ότι η σ είναι σχέση ισοδυναμίας άρα σ αυτοπαθής, συμμετρική, και μεταβατική.

Έστω $x \in E$.

Εφόσον η σ είναι αυτοπαθής, ισχύει $x \sigma x$

(συνεπώς υπάρχει $y \in E$ (το $y = x$) ώστε $x \sigma y$)

Αντίστροφα:

Υποθ. ότι σ συμμετρική μεταβατική και ισχύει η (*)

Απομένει ν.δ.ο. η σ είναι αυτοπαθής

Έστω $x \in E$

Άρα από την (*) υπάρχει $y \in E$: $x \sigma y$

Εφόσον η σ είναι συμμετρική προκύπτει $y \sigma x$.

Εφόσον $x \sigma y$ κ' $y \sigma x$ και η σ είναι μεταβατική.

Προκύπτει $x \sigma x$.

άρα σ αυτοπαθής, είναι σχέση ισοδυναμίας.